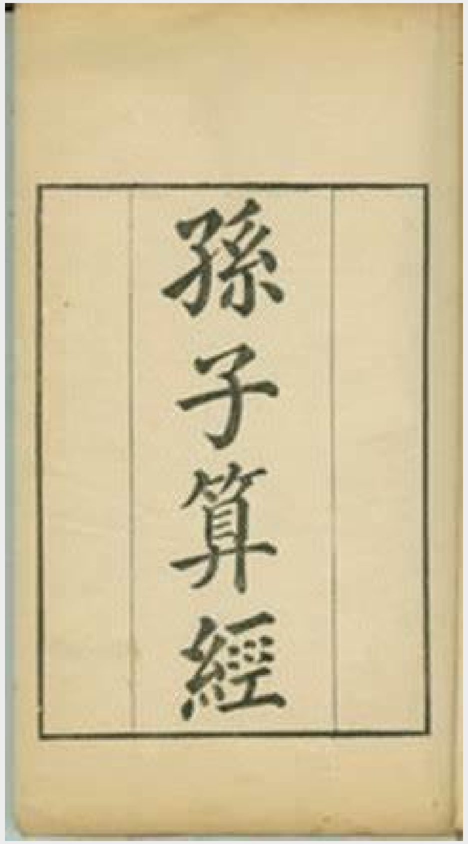
《数学大观》

十七、《孙子算经》

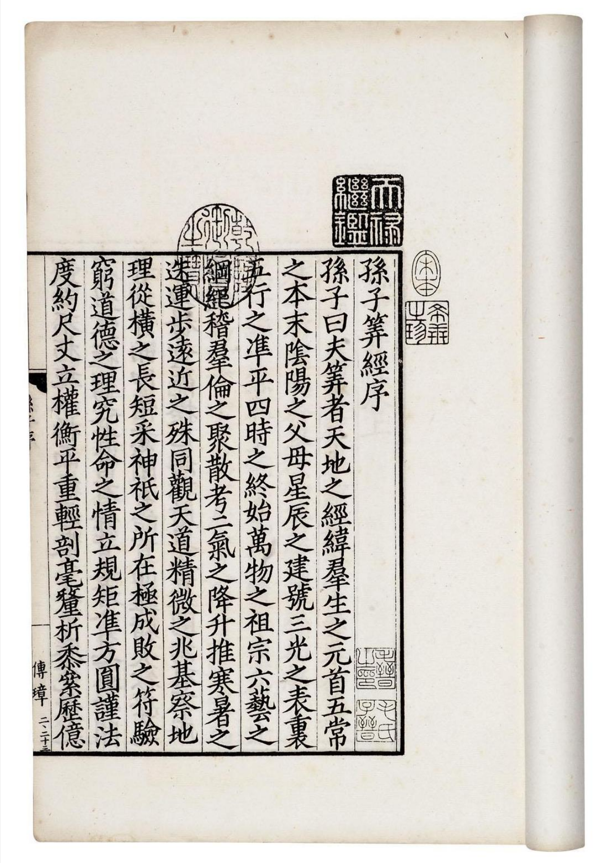
主 讲 人 ： 青 课

《孙子算经》3卷，人们常常把它误认为春秋时期军事家孙武的著作，实际上它是公元400年前后的作品，作者不详。

此书是一本初级数学读物。卷上列出了筹算记数制度及筹算乘除法则，有中国历史上第一次关于度量衡的全面记载，此外还有大数记法、某些物品的比重表、九九乘法表、平方表等预备知识。



此书是一本初级数学读物。卷上列出了筹算记数制度及筹算乘除法则，有中国历史上第一次关于度量衡的全面记载，此外还有大数记法、某些物品的比重表、九九乘法表、平方表等预备知识。



孫子筭經序

孫子曰夫筭者天地之經緯羣生之元首五常之本末陰陽之父母星辰之建號三光之表裏五行之準平四時之終始萬物之祖宗六藝之綱紀稽羣倫之聚散考二氣之降升推寒暑之迭運步遠近之殊同觀天道精微之兆基察地理從横之長短采神祇之所在極成敗之符驗窮道德之理究性命之情立規矩準方圓謹法度約尺丈立權衡平重輕剖毫釐析黍絫歷億

傳璋 二二十三

卷中、卷下共64个应用问题，都是分数四则、比例算法、面积和体积、盈不足、开平方、线性方程组解法等，有9个题目取自《九章算术》。

此书中“河上荡杯”、“鸡兔同笼”等题后来在民间得到了广泛流传，特别是“物不知数”问题开一次同余式解法之先河。不少数学名题，表现出独特的程序化解法和技巧。

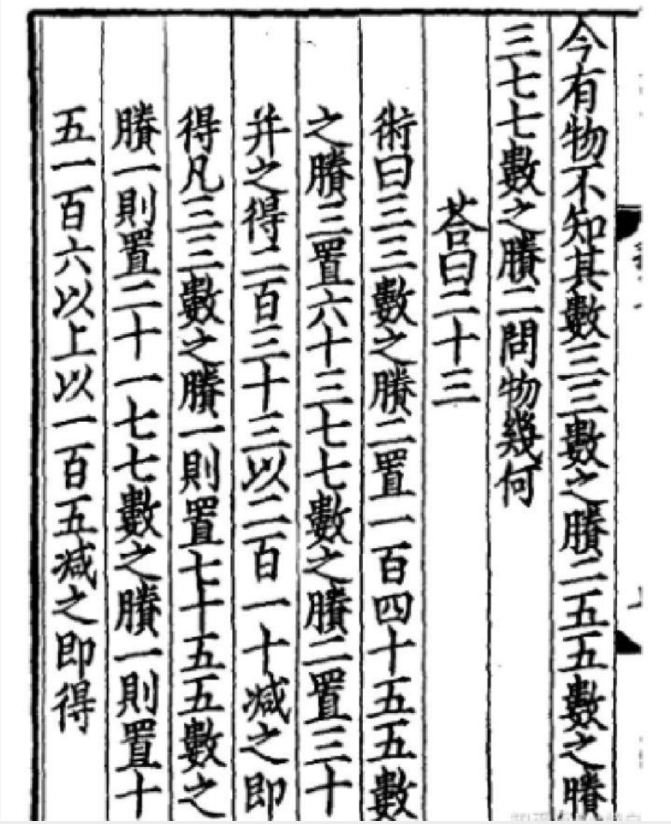
01

“物不知数”问题和中国剩余定理

《孙子算经》卷下第26问即是著名的“物不知数”问题。

今有物，不知其数。三、三数之，剩二；五、五数之，剩三；七、七数之，剩二。问物几何?

答曰：二十三。



今有物不知其數三三數之賸二五五數之賸
三七七數之賸二問物幾何
荅曰二十三
術曰三三數之賸二置一百四十五五數
之賸三置六十三七七數之賸二置三十
幷之得二百三十三以二百一十減之即
得凡三三數之賸一則置七十五五數之
賸一則置二十一七七數之賸一則置十
五一百六以上以一百五減之即得

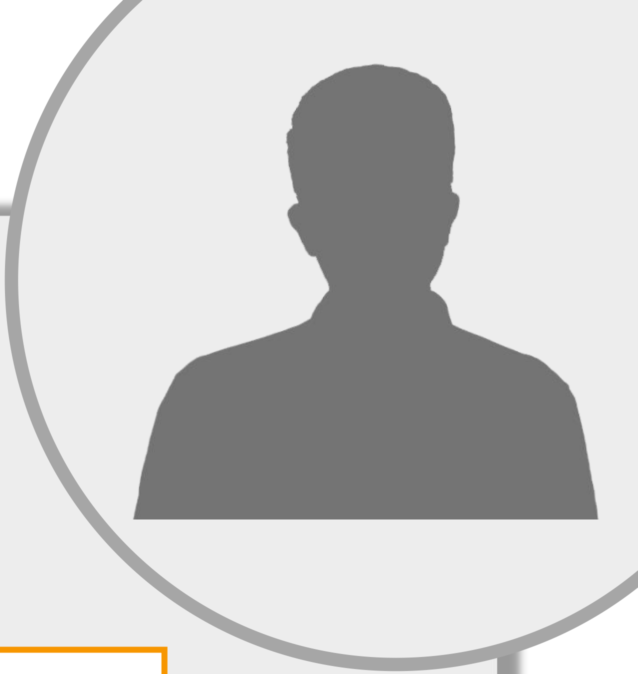
这是一个相当于解同余式组的问题，设N为所求之物数，问题的现代形式为：

$$N \equiv 2 \pmod{3} \equiv 3 \pmod{5} \equiv 2 \pmod{7}$$

求适合于上式的最小正整数 N

书中给出一般解法：

凡三、三数之，剩一，则置七十；五、五数之，剩一，则置二十一；七、七数之，剩一，则置十五。一百六以上，以一百五减之，即得。



关于“孙子问题”的一般情形，用现代同余式理论来解释如下：

对于同余式组：

$$N \equiv r_1 \pmod{3} \quad (0 \le r_1 < 3)$$

$$N \equiv r_2 \pmod{5} \quad (0 \le r_2 < 5)$$

$$N \equiv r_3 \pmod{7} \quad (0 \le r_3 < 7)$$

更为一般地，如果因数2，1，1分别为k_1，k_2，k_3，模3，5，7分别为a_1，a_2，a_3， 则以上的孙子问题解法可进一步推广为：

如果同余式组：

$$N\equiv r_1 \pmod{a1} \qquad (0\le r_1< a_1)$$

$$N\equiv r_2 \pmod{a2} \qquad (0\le r_2< a_2)$$

$$N\equiv r_3 \pmod{a3} \qquad (0\le r_3< a_3)$$

由于模a_1，a_2，a_3，两两互素，即（a_1，a_2）=（a_2，a_3）=（a_1，a_3）=1，如果能找到整数k_1，k_2，k_3，使得，下面三式成立：

$$k_1 \frac{m}{a_1} \equiv 1 \pmod{a_1}$$

$$k_2 \frac{m}{a_1} \equiv 1 \pmod{a_2}$$

$$k_3 \frac{m}{a_1} \equiv 1 \pmod{a_3}$$

这里$m = a_1a_2a_3$，则：$N = r_1k_1 \frac{m}{a_1} + r_2 k_2 \frac{m}{a2} + r_3k_3 \frac{m}{a3} - pa_1a_2a_3$

问题的关键是求出ki，使$k_i \cdot \frac{m}{r_i} \equiv 1 \pmod{a_i}$

其中 $i=1，2，3$。这一步是书中明确给出的，但是如何求 k_i 却未提到。

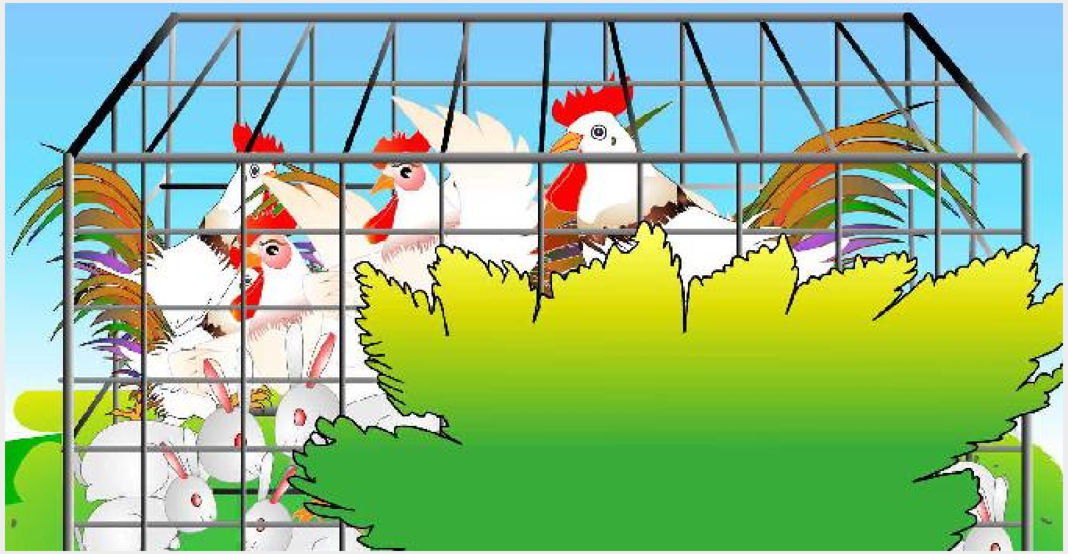
大约到了13世纪，才由数学家秦九韶给予解决。

02

“难免同笼”问题

《孙子算经》卷下第31问记述着著名的“雉兔同笼”（现通称“鸡兔同笼”）问题：

今有雉兔同笼，上有三十五头，下有九十四足。问雉兔各几何?



答曰：雉二十三；兔一十二。

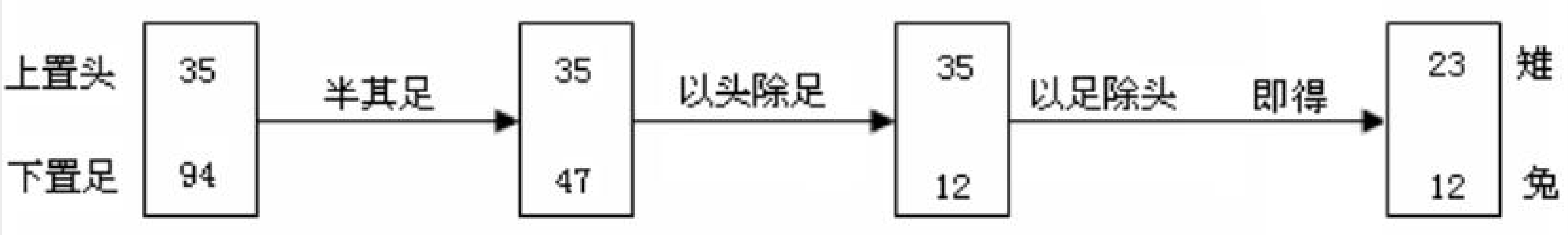
术曰：上置三十五头，下置九十四足。半其足，得四十七。以少减多，再命之。上三除下三，上五除下五。下有一除上一，下有二除上二，即得。

又术曰：上置头，下置足。半其足。以头除足，以足除头，即得。

依据“术曰”文，问题解决程序过程表示如下

（用现代数字代替算筹符号）：

根据“又术曰”文：



03

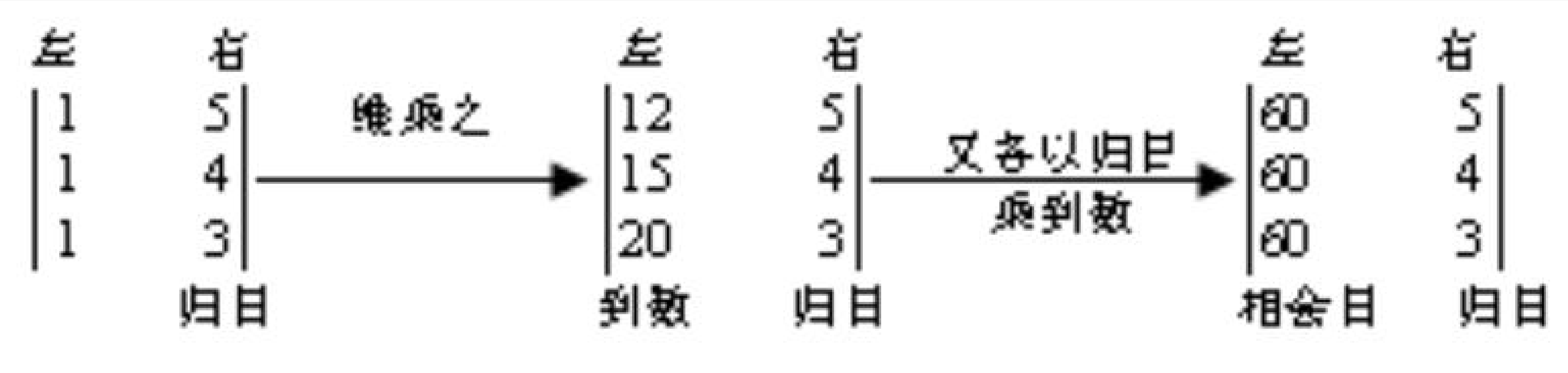
“三女会合”问题

《孙子算经》卷下第35问为“三女会合”，实为一道求最小公倍数的问题：

今有三女，长女五日一归，中女四日一归，少女三日一归。问三女几何日相会?

答曰：六十日

术曰：置长女五日、中女四日、少女三日于右方。各列一算于左方。维乘之，各得所到数。长女十二到，中女十五到，少女二十到。又各以归日乘到数即得。



先计算三女的回归次数：3×4＝12，3×5＝15，4×5＝20。

再与各自归日对应相乘：12×5＝15×4＝20×3＝60。

感谢聆听